



Wes-Kaapse
Regering

VIR JOU

Onderwys



Wes-Kaapse Onderwysdepartement

WISKUNDE

Graad 12 Kwartaal 3 2026

Groep A

Leerdernotas

INHOUD		BLADSY
6.	CALCULUS	
	6.1 DIE AFGELEIDE	3
	6.2 DIE RAAKLYN	6
	6.3 GRAFIEK VAN KUBIESE POLINOOM	7
	6.4 GRAFIEKE VAN AFGELEIDES	10
	6.5 VORIGE EKSAMENVRAESTELLE	11
7.	STATISTIEK	
	7.1 GRAAD 10 HERSIENING	12
	7.2 GRAAD 11 HERSIENING	17
8.	STATISTIEK	
	8.1 GRAAD 12 HERSIENING	20

CALCULUS

6.1 AFGELEIDE

DIE AFGELEIDE VAN 'N FUNKSIE BY 'N PUNT GEE

- Die tempo van verandering van 'n funksie by die punt
- Die gradiënt van die raaklyn aan die funksie by die punt.
 $y = mx + c$ waar $f'(a) = m$ by die punt waar $x = a$

DEFINISIE VAN 'N AFGELEIDE

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Beskikbaar van
die formuleblad

REËL

$$\text{As } f(x) = ax^n \text{ dan } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

NOTASIES

$$f'(x) ; \quad \frac{dy}{dx} ; \frac{d}{dx} ; D_x[\quad]$$

Behalwe as die vraag sê “differensieer vanuit eerste beginsels”, is dit makliker om die reëls vir een van die notasies te gebruik.

DFERENSIEER VANUIT EERSTE BEGINSELS

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels as gegee is dat:

VOORBEELD 1: $f(x) = -4x + 3$

Oplossing:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= -4(x+h) + 3 \\ &= -4x - 4h + 3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= -4x - 4h + 3 - (-4x + 3) \\ &= -4h \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-4h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-4) \\ &= -4 \end{aligned}$$

VOORBEELD 2: $f(x) = x^2 - 3x$

Oplossing:

$$\begin{aligned}(x+h) &= (x+h)^2 - 3(x+h) \\ &= x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f(x+h) - f(x) &= x^2 + 2xh + h^2 - 3x - 3h - (x^2 - 3x) \\ &= 2xh + h^2 - 3h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 3h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 3) \\ &= 2x - 3\end{aligned}$$

Oefening:

Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels as gegee is dat:



JY DOEN!

1. $f(x) = 3x^2 - 4$

2. $f(x) = 2x^2 - x$

DIFFERENSIEER DEUR REËLS TE GEBRUIK

$$\text{As } f(x) = ax^n \text{ dan } f'(x) = a \cdot nx^{n-1}$$

VOORBEELD 1

Bepaal:

NOTASIE!

1.1 $\frac{dy}{dx}$ if $y = 4x^3$	1.2 $f'(x)$ if $f(x) = 4x^3$	1.3 $D_x(4x^3)$	1.4 $\frac{d}{dx}(4x^3)$
--------------------------------------	---------------------------------	--------------------	-----------------------------

Oplossing:

$\therefore \frac{dy}{dx} = 12x^2$	$\therefore f'(x) = 12x^2$	$D_x(4x^3) = 12x^2$	$\frac{d}{dx}(4x^3) = 12x^2$
------------------------------------	----------------------------	---------------------	------------------------------

VOORBEELD 2

Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = 3x^3 + 6x^2 + x - 4$

Oplossing:

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 9x^2 + 12x + 1$$

VOORBEELD 3	VOORBEELD 4
Bepaal $f'(x)$ if $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2$. Oplossing: $f(x) = \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2$ $= x^4 - 2 + \frac{1}{x^4}$ $= x^4 - 2 + x^{-4}$ $\therefore f'(x) = 4x^3 - 4x^{-5}$	Bepaal $D_x \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$ Oplossing: $D_x \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$ $= D_x \left(\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}\right)$ $= D_x(x^2+x+1)$ $= 2x+1$
VOORBEELD 5 Bepaal $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^3} - \frac{5}{3x^3}\right)$ Oplossing: $\frac{d}{dx} \left(\sqrt{x^3} - \frac{5}{3x^3}\right)$ $= \frac{d}{dx} \left(x^{\frac{3}{2}} - \frac{5}{3}x^{-3}\right)$ $= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} + 5x^{-4}$	

Oefening:

1. Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{3}{2x} - \frac{x^2}{2}$

2. Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = \frac{x+5}{\sqrt{x}}$

3. Bepaal $D_x[(x+1)(3x-7)]$



JY DOEN!

VORIGE EKSAMENVRAESTELLE

VRAAG 1 (JUNIE 2019)

1.1 Gegee: $f(x) = x^2 + 2$

(4)

Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels.

1.2 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as:

1.2.1 $y = 4x^3 + \frac{2}{x}$ (3)

1.2.2 $y = 4\sqrt[3]{x} + (3x^3)^2$ (4)

VRAAG 2 (JUNIE 2018)

2.1 Gegee: $f(x) = 2 - 3x^2$ (5)
Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels.

2.2 Bepaal:

2.2.1 $D_x[(4x + 5)^2]$ (3)

2.2.2 $\frac{dy}{dx}$ if $y = \sqrt[4]{x} + \frac{x^2-8}{x^2}$ (4)

VRAAG 3 (JUNIE 2017)

3.1 Gegee: $f(x) = 3 - 2x^2$
Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels. (5)

3.2 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as $y = \frac{12x^2+2x+1}{6x}$ (4)

VRAAG 4 (JUNIE 2016)

4.1 Gegee: $f(x) = 3x^2 - 5$
Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels. (5)

4.2 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ as
4.2.1 $y = 2x^5 + \frac{4}{x^3}$ (3)

4.2.2 $y = (\sqrt{x} - x^2)^2$ (4)

6.2 DIE GRADIËNT VAN DIE RAAKLYN AAN DIE FUNKSIE BY 'N PUNT

$y = mx + c$ waar $f'(a) = m$ by die punt $x = a$

VOORBEELD

Bepaal die gradiënt van die raaklyn aan die grafiek van $f(x) = -3x^3 - 4x + 5$ by $x = -1$

Oplossing:

$$f(x) = -3x^3 - 4x + 5$$

$$f'(x) = -9x^2 - 4$$

$$\begin{aligned}\text{Gradiënt } (m) &= f'(-1) = -9(-1)^2 - 4 \\ &= -13\end{aligned}$$

Oefening:

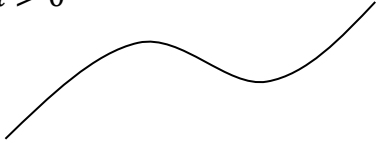
Beskou die grafiek van $g(x) = -2x^2 - 9x + 5$.

Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van g by $x = -1$



JY DOEN!

6.3 DIE GRAFIEK VAN 'N KUBIESE POLINOOM

VERGELYKINGS	
• Standaardvorm: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ • Draaipuntvorm: $y = a(x - x_1)(x - x_2)^2$ • Afsnitvorm: $y = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$	
SKETS DIE GRAFIEK	
As $a > 0$ 	As $a < 0$ 
y-AFSNIT • Substitute $x = 0$ Solve for y	x-AFSNIT Substitute $y = 0$ Solve for x by factorising
DRAAIPUNT • Bepaal $f'(x)$ • $f'(x) = 0$ • Los op vir x Vervang x in oorspronklike formule	BUIGPUNT • Bepaal $f''(x)$ • $f''(x) = 0$ • Los op vir x Vervang x in oorspronklike formule
KONKAWITEIT • $f''(x) > 0 \Rightarrow$ konkaaf OP • $f''(x) < 0 \Rightarrow$ konkaaf AF	RAAKLYN AAN KURWE $y - y_1 = m(x - x_1)$ OF $y = mx + c$ $m = f'(x)$ by 'n spesiasieke punt Bepaal die afgeleide (m)

VRAAG 1 (Q8 – DBE/ Feb-Mar 2016)

Gegee: $f(x) = 2x^3 - 23x^2 + 80x - 84$

Ons doen!

- 1.1 Vind die y – afsnit van f . (1)
- 1.2 Bewys dat $(x - 2)$ 'n faktor van f is. (2)
- 1.3 Vervolgens, of andersins, faktoriseer $f(x)$ volledig. (3)
- 1.4 Bepaal die koördinate van die draaipunt van f . (4)
- 1.5 Skets die grafiek van f , wys duidelik ALLE draaipunte en afsnitte met die asse. (3)
- 1.6 Vind die vergelyking van die raaklyn aan f by die punt waar $x = 1$. (4)
- 1.7 Bepaal die buigpunt. (2)
- 1.8 Vir watter waardes van x sal f konkaaf of wees. (1)

VRAAG 2 (Q9 – DBE/ Nov 2014)

Gegee: $f(x) = (x + 2)(x^2 - 6x + 9)$
 $= x^3 - 4x^2 - 3x + 18$



JY DOEN!

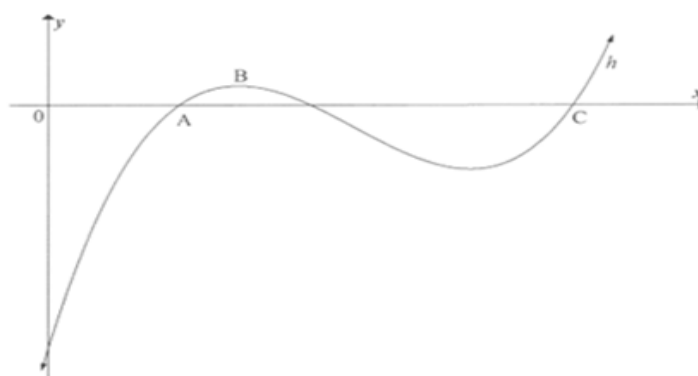
- 2.1 Skryf die koördinate van die y – afsnit van f neer. (1)
- 2.2 Bepaal die x – afsnit van f . (2)
- 2.3 Bereken die koördinate van die draaipunte van die grafiek van f . (6)
- 2.4 Skets die grafiek van f , wys duidelik die afsnitte met die asse en die draaipunte. (4)
- 2.5 Vir watter waarde(s) van x sal $x \cdot f'(x) < 0$? (3)

Ons doen!

[15]

VRAAG 3 (Q8 - DBE/ Feb-Mar 2015)

Die skets hieronder wys die grafiek van $h(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. Die x – koördinate van punt A is 1. C is nog 'n x – afsnit van h .



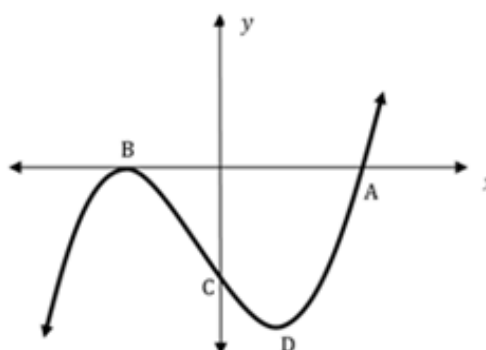
- 3.1 Bepaal $h'(x)$ (1)
- 3.2 Bepaal die x – koördinate van die draaipunt B. (3)
- 3.3 Bereken die koördinate van C (4)
- 3.4 Die grafiek van h is konkav af vir $x < k$. Bereken die waarde van k . (3)

[22]

VRAAG 4

(Q9 – WCED / Sept 2016)

Die diagram hieronder wys die grafiek van $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.



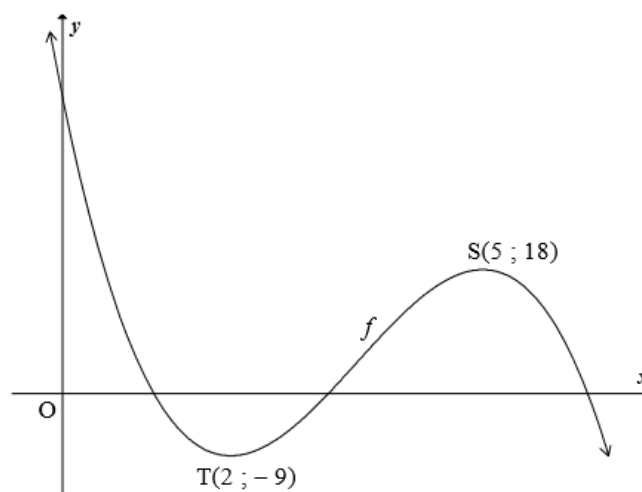
JY DOEN!

- 4.1 Bereken die afstand tussen A en B, die x - afsnitte. (5)
- 4.2 Bereken die koördinate van D, die draaipunt van f . (3)
- 4.3 Wys dat die konkawiteit van f verander by $x = -\frac{1}{3}$ (3)
- 4.4 Vir watter waardes van x is :
 - 4.4.1 $f(x) > 0$ (1)
 - 4.4.2 $f(x) \cdot f'(x) < 0$ (3)

VRAAG 5 (Q9 – WCED / Nov 2011)

Die funksie $f(x) = -2x^3 + ax^2 + bx + c$ is hieronder geskets.
Die draaipunte van f is $T(2; -9)$ en $S(5; 18)$.

Ons doen!



5.1 Wys dat $a = 21$, $b = -60$ en $c = 43$. (7)

5.2 Bepaal 'n vergelyking van die raaklyn aan die grafiek van f by $x = 1$. (5)

5.3 Bepaal die x - waarde waarby die grafiek van f 'n buigpunt het. (2)

[14]

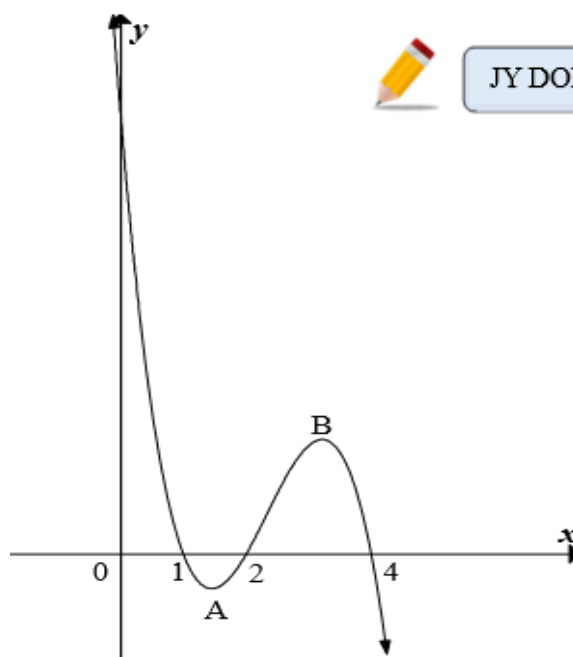
VRAAG 6 (Q11 – DBE/Feb-Mar 2014)

Die grafiek van $f(x) = -x^3 + ax^2 + bx + c$ is geskets.

Die x - afsnitte word aangedui.



JY DOEN!



6.1 Bereken die waardes van a , b en c . (4)

6.2 Bereken die x - koördinate van A en B, die draaipunte van f . (5)

6.3 Vir watter waardes van x sal $f'(x) < 0$? (3)

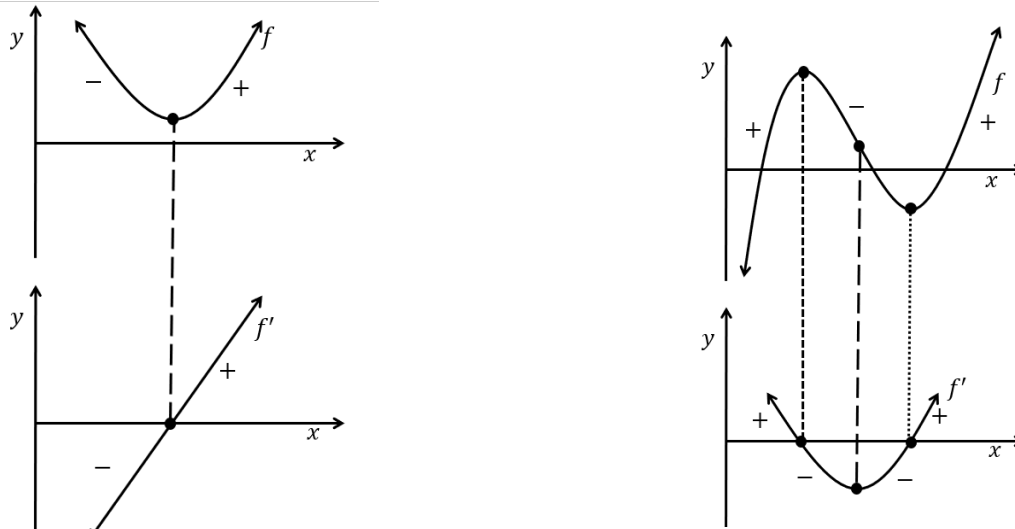
[12]

6.4 GRAFIEKE VAN AFGELEIDES

AFGELEIDE GRAFIEK VS OORSPRONKLIKE FUNKSIE

VOORBEELD 1

In die diagram hieronder, die boonste grafiek is die oorspronklike funksie, f , en die onderste grafiek is die afgeleide, f' .



Wat merk jy op oor elkeen van die pare?

- As die helling van f positief is, dan sal die grafiek van f' bokant die x -as wees.
 - As die helling van f negatief is, dan sal die grafiek van f' onderkan die x -as wees.
- Die draaipunt van f is die x -afsnit(te) van f' .
 - Die draaipunt van f' is buigpunt van f .

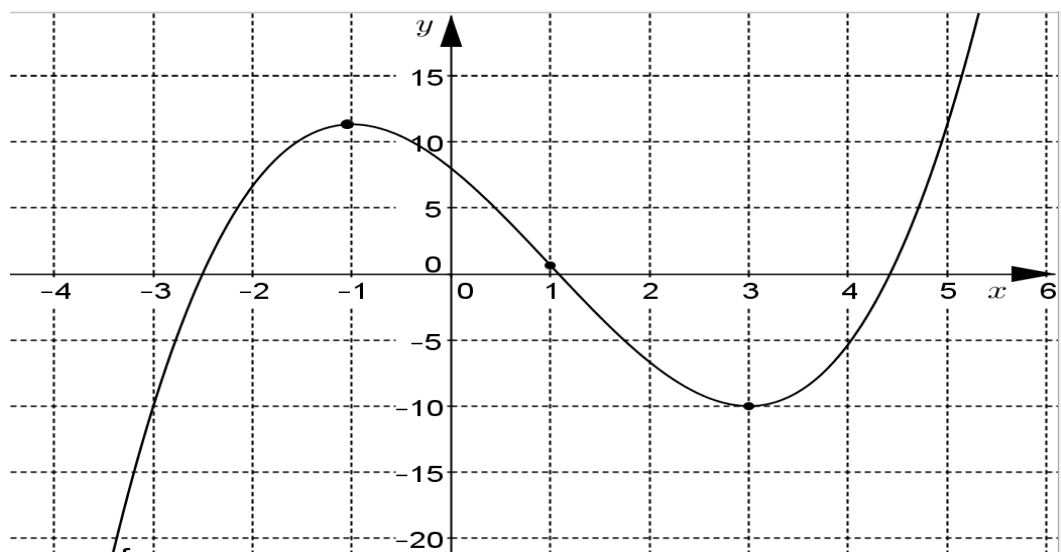
VOORBEELD 2

In die diagram hieronder, is die skets van die oorspronklike funksie,

$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 - 6x + 8$$



JY DOEN!



Skets die volgende op die diagramblad hierbo:

(Wys alle x -afsnitte en moontlike draaipunte)

2.1 $f'(x)$

2.2 $f''(x)$

6.5 VORIGE EKSAMENVRAESTELLE

VRAAG 1 (Q7 - DBE / Nov 2022)

- 1.1 Bepaal $f'(x)$ vanuit eerste beginsels as $f(x) = x^2 + x$. (5)
- 1.2 Bepaal $f'(x)$ as $f(x) = 2x^5 - 3x^4 + 8x$. (3)
- 1.3 Die raaklyn aan $g(x) = ax^3 + 3x^2 + bx + c$, het 'n minimum gradiënt by die punt $(-1; -7)$. Vir watter waardes van x sal g konkaaf op wees? (4)
[12]

VRAAG 2 (Q8 - DBE / Nov 2017)

Gegee $f(x) = x(x - 3)^2$ met $f'(1) = f'(3) = 0$ en $f(1) = 4$

- 2.1 Wys dat f 'n buigpunt het by $x = 2$. (5)
- 2.2 Skets die grafiek van f , wys duidelik die afsnitte met die asse en draaipunte. (4)
- 2.3 Vir watter waardes van x sal $y = -f(x)$ konkaaf op wees? (2)
- 2.4 Gebruik jou grafiek om die volgende vrae te beantwoord:
- 2.4.1 Bepaal die koördinate van die lokale maksimum van h as $h(x) = f(x - 2) + 3$. (2)
- 2.4.2 Claire beweer dat $f'(2) = 1$. (2)
- Stem jy saam met Claire? Verduidelik jou antwoord.

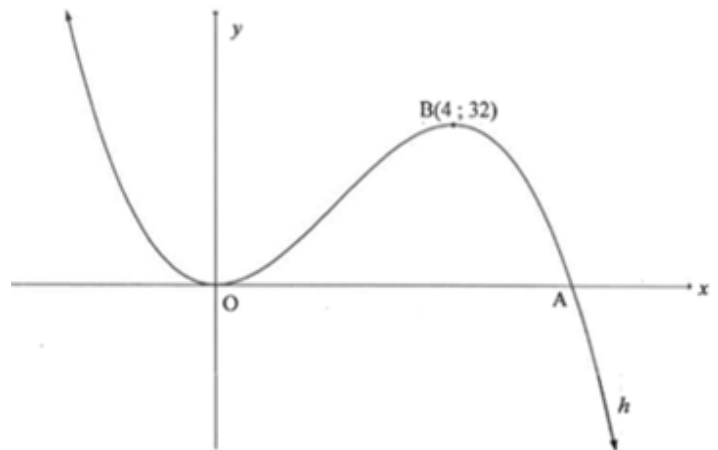
VRAAG 3 (Q10 - DBE/ Nov 2021)

Die grafiek van $k(x) = ax^3 + bx^2$ is geskets.

Die grafiek het draaipunte by die oorsprong,

$O(0; 0)$ en $B(4; 32)$.

A is die x - afsnit van h .

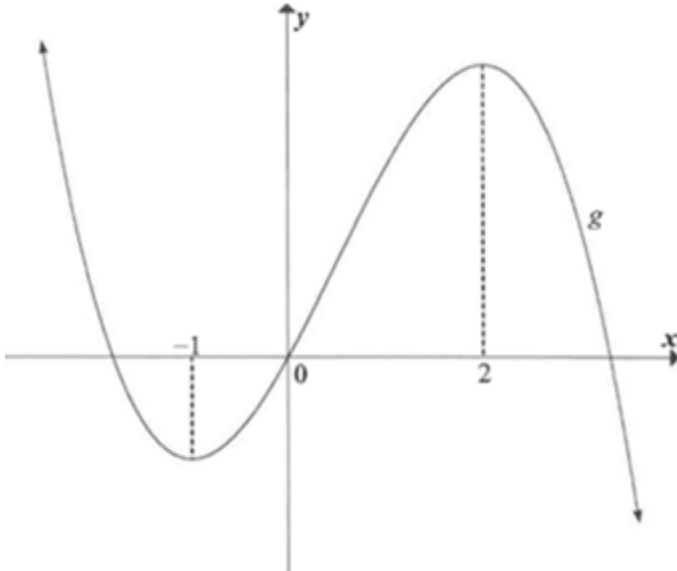


- 3.1 Wys dat $a = -1$ en $b = 6$. (5)
- 3.2 Bereken die koördinate van A. (3)
- 3.3 Skryf die waardes van x neer waarvoor h :
- 3.3.1 Stygend is (2)
- 3.3.2 Konkaaf af is (2)
- 3.4 Vir watter waardes van k sal $-(x - 1)^3 + 6(x - 1)^2 - k = 0$ een negatiewe en twee duidelike positiewe wortels hê? (3)

VRAAG 4 (Q8 - DBE/ Nov 2020)

Die grafiek van $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, 'n kubiese funksie met 'n y – afsnit van 0, is hieronder geteken.

Die x –koördinate van die draaipunte van g is -1 en 2 .



- 4.1 Vir watter waardes van x sal g styg? (2)
- 4.2 Skryf die x – koördinate van die buigpunt van g neer. (2)
- 4.3 Vir watter waardes van x sal g konkaaf af wees? (2)
- 4.4 As $g'(x) = -6x^2 + 6x + 12$, bepaal die vergelyking van g . (4)
- 4.5 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan g wat 'n maksimum gradiënt het. (5)
Skryf jou antwoord in die vorm $y = mx + c$.

7 STATISTIEK

7.1 Graad 10 Hersiening

<u>Maatstawwe van sentrale neiging</u> (ongegroepeerde data)		
Gemiddelde ($\bar{x}$)	<u>Mediaan</u> (Q_2)	<u>Modus</u>
Die som van al die waardes (x) van die datastel gedeel deur die aantal waardes in die datastel (n). $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$	- Die middel waarde van die geordende datastel. - Verdeel data in twee gelyke stelle. - Posisie van $Q_2 = \frac{1}{2}(n + 1)$.	Die waarde in die datastel wat die hoogste frekwensie of die waarde wat die meeste voorkom.

$\sum$ = som van

Rangskik data in stygende order.

<u>Maatstawwe van sentrale neiging</u> (geordende data)		
<u>Berekening van benaderde gemiddeld</u>	<u>Mediaan</u>	<u>Modus</u>
- Skep addisionele kolomme vir Middelpunt van klasinterval en Frekwensie × Middelpunt. - Bereken die Middelpunt van klasinterval en Frekwensie × Middelpunt. Middelpunt van klasinterval = $\frac{\text{Onderste limiet van klas} + \text{boonste limiet van klas}}{2}$ - Vermenigvuldig die frekwensie kolom met die middelpunt van elke klasinterval. - Bereken die som van die Frekwensie kolom om “n” te vind. - Bereken die som van Frekwensie × Middelpunt kolom om “$\sum x$” waarde te vind. - Vervang stap 3 en 4 in $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ om geskatte gemiddeld te kry.	Bepaal die posisie van Q_2. Bepaal in watter klasinterval die posisie van Q_2 val. Gebruik die klasmiddelpunt vir die waarde van Q_2.	Die klasinterval met die hoogste frekwensie.

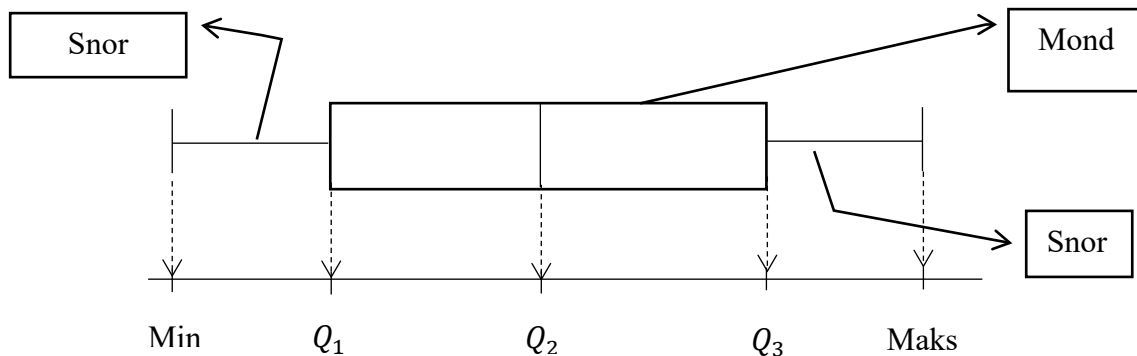
Maatstawwe van verspreiding

Variasiewydte Maksimum waarde – Minimum waarde. Interkwartielvariasiewydte $IKV = Q_3 - Q_1$ Semi – Interkwartielvariasiewydte $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$	Kwartiele Verdeel geordende data in kwarte. Onderste kwartiel (Q_1) Mediaan (Q_2) Boonste kwartiel (Q_3) Die posisie van $Q_1 = \frac{1}{4}(n + 1)$. Die posisie van $Q_3 = \frac{3}{4}(n + 1)$.	Persentiele Verdeel geordende datastel in 'n 100 gelyke dele. Die posisie van die k^{ste} persentiel = $\frac{k}{100}(n + 1)$.
--	---	--

<u>The five number summary</u> Die vyfgetal opsomming word voorgestel deur die volgende maatstawwe van verspreiding: ❖ Die minnimum waarde van die datastel. ❖ Q_1 ❖ Q_2 ❖ Q_3 Die maksimum waarde van die datastel.	<u>Outliers</u> Dit is waardes wat baie groter of kleiner is as die gegewe data items.
---	--

Mond- en - Snor diagram

Die mond – en – snor diagram is die grafiese voorstelling van die vyfgetal opsomming.

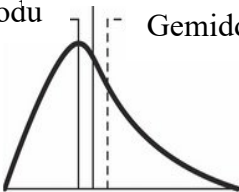
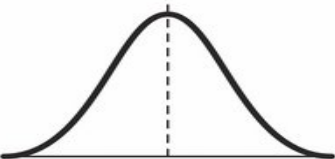
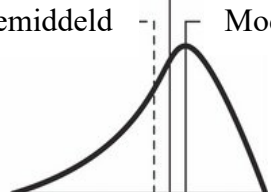
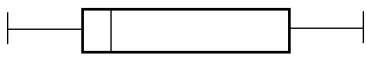
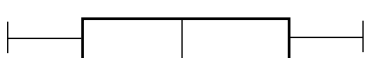
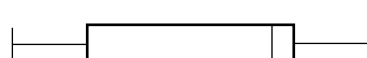
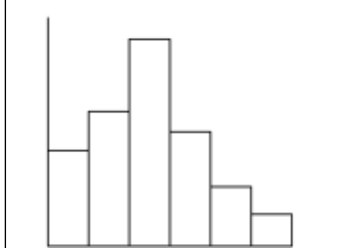
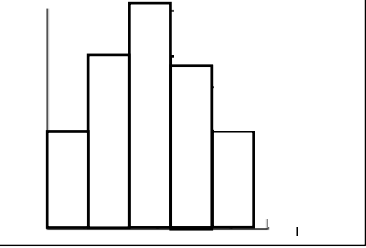
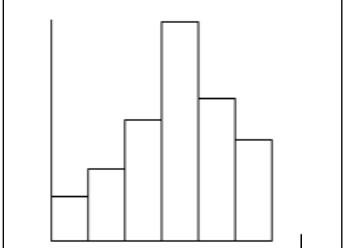


Teken wenke

Die diagram moet altyd 'n mond en 'n snor hê.
Toon die vyfgetal opsomming duidelik op die as

Belangrike gevolgtrekkings van af die mond – en – snor digram.

- 25% van die data lê tussen die minnimum waarde en Q_1 .
- 25% van die data lê tussen Q_1 en Q_2 .
- 25% van die data lê tussen Q_2 en Q_3 .
- 25% van die data lê tussen Q_3 en die maksimum waarde.

<u>Verspreiding van data</u>		
Positief skeef/Skeef na regs	Simmetriese verspreiding	Negatief skeef/Skeef na lings
'n Hoë volume van die data is geleë by die laer waardes van die data stel. Die hoër waardes van die data stel is wyer verspreid. Gemiddelde > Mediaan.	'n Hoë volume data rond om gedie gemiddelde geleë. Die data is simmetries versreid. Gemiddelde = Mediaan.	'n Hoë volume van die data is geleë by die hoër waardes van die data stel.
Grafiese voorstelling van verspreiding		
Mediaan Modus Gemiddeld  Positief skeef	Gemiddeld/Mediaan Modus  Simmetries verspreid	Mediaan Gemiddeld Modus  Negatief skeef
Positief skeef 	Simmetries verspreid 	Negatief skeef 
Positief skeef 	Simmetries verspreid 	Negatief skeef 
<u>Belangrike gevolgtrekkings:</u> Skeefheid beïnvloed die gemiddelde. Hoe skewer die data, hoe minder kan die gemiddelde gebruik word vir sentrale neiging. Indien die data skeef na links is, beteken dit dat die gemiddelde te laag is. Indien die data skeef na regs is, beteken dit dat die gemiddelde te hoog is. Die beste manier om sentrale neiging te toets is om die mediaan te gebruik omdat dit nie verander nie, al verander die skeefheid van die data.		

Graad 10 Hersienings oefening

VRAAG 1

Die lengtes van 20 kinders is gemeet (in sentimeter) en die resultate is aangeteken. Die data ingesamel, word in die tabel hieronder getoon.

127	128	129	130	131	133	134	134	135	136
137	138	139	140	141	142	142	143	144	145

1.1 Skryf die mediaanlengte gemeet neer. (1)

1.2 Bepaal:

1.2.1 Die gemiddelde lengte. (2)

1.2.2 Die variasiewydte (1)

1.2.3 Die interkwartielvariasiewydte (3)

1.3 Teken 'n mond-en-snordigram om die data voor te stel. (2)

[9]

VRAAG 2

Die intelligensiekwosiënt (IK) van 'n graad 10-klas is in die tabel hieronder opgesom.

IK INTERVAL	FREKWENSIE
$90 \leq x < 100$	4
$100 \leq x < 110$	8
$110 \leq x < 120$	7
$120 \leq x < 130$	5
$130 \leq x < 140$	4
$140 \leq x < 150$	2

2.1 Skryf die modale klas van die data neer. (1)

2.2 Bepaal die interval waarin die mediaan lê. (2)

2.3 Beraam die gemiddelde IK-waarde van hierdie klas leerders. (3)

[6]

7.2 Graad 11 Hersiening

Kumulatiewe frekwensie grafiek (ogief)

Dit is die totale frekwensie en alle frekwensies tot dusver in 'n frekwensie verspreiding. Dit is die "lopende totaal" van frekwensies.

Wat moet ek kan doen?

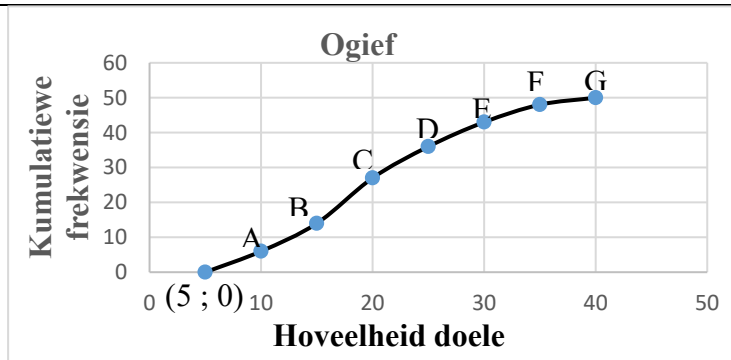
- Gebruik die frekwensietabel om 'n ogief te teken.
- Interpreteer die ogief.
- Gebruik 'n ogief om die frekwensietabel te voltooi.
- Gebruik die ogief om persentiele en kwartiele te bereken.

Wat is belangrik wanneer 'n ogief geteken word?

1. Dit moet 'n opskrif hê.
2. Die asse moet benoem word.
3. Plot die punte. (Boonste grens van klas; kumulatiewe frekwensie van klas)
4. ANKER die ogief by
(onderste grens van die eerste interval; 0)
Wanneer jy die kurwe skets mag jy nie 'n liniaal gebruik nie. Dit is 'n S – vormige skets.

VOORBEELD: Frekwensie Tabel

Hoeveelheid doele	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie	Koördinate
$5 < x \leq 10$	6	6	A (10 ; 6)
$10 < x \leq 15$	8	14	B (15 ; 14)
$15 < x \leq 20$	13	27	C (20 ; 27)
$20 < x \leq 25$	9	36	D (25 ; 36)
$25 < x \leq 30$	7	43	E (30 ; 43)
$30 < x \leq 35$	5	45	F (35 ; 45)
$35 < x \leq 40$	2	50	G (40 ; 50)



Hoe word kwartiele en persentiele grafies bepaal.

1. Vind die posisie.
2. Vind die posisie op die kumulatiewe frekwensie as.
3. Teken 'n gebroke lyn na die ogief.
4. Teken 'n gebroke lyn van die ogief na die x – as.
5. Lees die waarde van die x – as af.

Standardafwyking en Variansie

Standaardafwyking(σ) is 'n getal wat wys met hoe die data om die van die **gemiddelde** van die data verspreid is. Hoe groter die waarde van die standaardafwyking, hoe verder lê die data van die gemiddelde ($\bar{x}$). Dit gee 'n aanduiding dat die gemiddelde nie 'n betroubare maatstaf van sentrale neiging is nie, en dat die mediaan meer geskik sal wees. Hoe kleiner die standaardafwyking is, hoe nader lê die data aan die gemiddelde. Dit wil sê dat die gemiddelde 'n betroubare maatstaf van sentrale neiging sal wees. Die variansie is die kwadraat van die standaardafwyking (σ^2). Die interval van data wat k standaardafwykings van die gemiddelde is ($\bar{x} - k\sigma; \bar{x} + k\sigma$).

Hoe om standaardafwyking te bepaal met jou casio sakrekenaar.

1. Druk “mode” en selekteer STAT.
2. Selekteer “1 – VAR”.
3. Voer waardes in. Na elke individuele waarde ingesleutel is druk “=” “ voor die volgende waarde ingesleutel word.
4. Na alle individuele waardes ingesleutel is druk “AC”.
5. Om σ te vind druk “SHIFT STAT(by 1)”.
6. Druk dan “Var” om σ te vind.

Graad 11 Hersienings oefening**VRAAG 1**

Die tabel hieronder toon die gewig (tot die naaste kilogram) van elk van die 27 deelnemers aan 'n gewigsverliesprogram.

56	68	69	71	71	72	82	84	85
88	89	90	92	93	94	96	97	99
102	103	127	128	134	135	137	144	156

- 1.1 Bereken die omvang (variasiewydte) van die data. (2)
- 1.2 Skryf die modus van die data neer. (1)
- 1.3 Bepaal die mediaan van die data. (1)
- 1.4 Bepaal die interkwartielomvang van die data. (3)
- 1.5 Gebruik die getallelyn wat in die ANTWOORDEBOEK word om 'n mond-verskaf en-snordigram van die data hierbo te skets. (2)
- 1.6 Bepaal die standaardafwyking van die data. (2)
- 1.7 Die persoon wat 127 kg weeg, beweer dat sy meer as een standaardafwyking bo die gemiddelde weeg. Stem jy met dié persoon saam? Gebruik berekeninge om jou antwoord (3)

[14]**ANSWERBOOK**

1.5		(2)
-----	--	-----

VRAAG 2

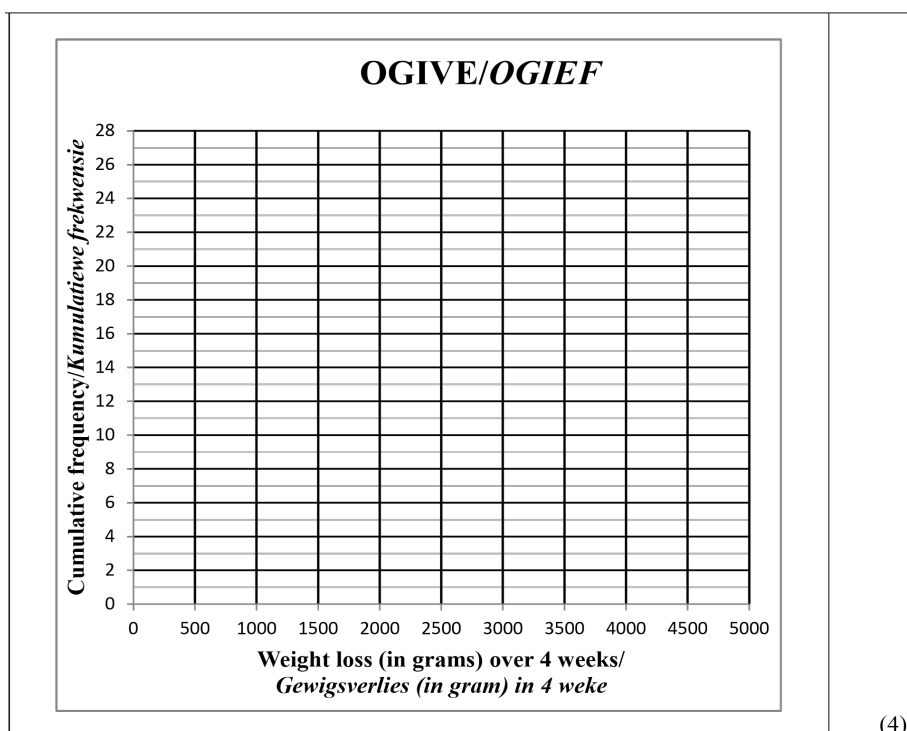
Die tabel hieronder toon die gewig (in gram) wat elkeen van die 27 deelnemers in totaal in die eerste 4 weke op die gewigsverliesprogram verloor het.

WEIGHTLOSS IN 4 WEEKS (IN GRAM)	FREQUENCY
$1\ 000 < x \leq 1\ 500$	2
$1\ 500 < x \leq 2\ 000$	3
$2\ 000 < x \leq 2\ 500$	3
$2\ 500 < x \leq 3\ 000$	4
$3\ 000 < x \leq 3\ 500$	5
$3\ 500 < x \leq 4\ 000$	7
$4\ 000 < x \leq 4\ 500$	2
$4\ 500 < x \leq 5\ 000$	1

- 2.1 Skets 'n ogief (kumulatiewefrekwensie-grafiek) van die data op die rooster wat verskaf word. (4)
- 2.2 Die gewigsverliesprogram waarborg 'n verlies van 800 g per week indien 'n persoon die program volg sonder om te kul. Bepaal vervolgens hoeveel van die deelnemers in die eerste 4 weke 'n gemiddelde gewigsverlies van 800 g of meer per week gehad het. (2)

[8]

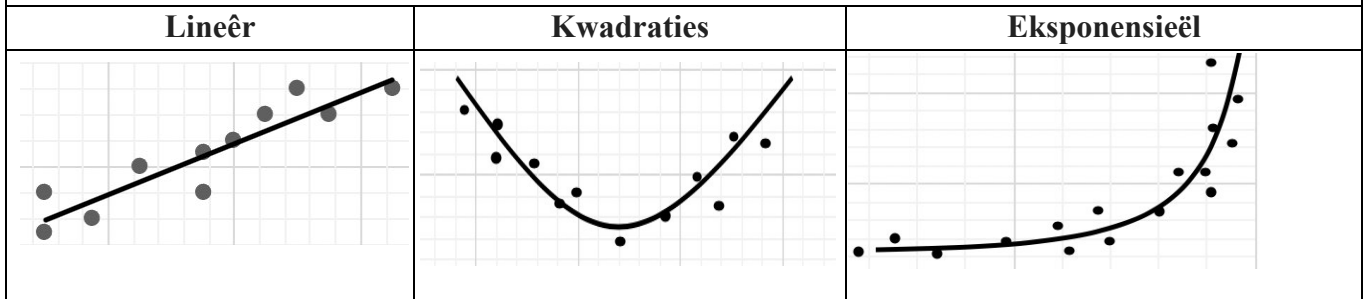
ANTWOORDBOEK



8 Graad 12 Hersiening

Spreidingsdiagramme

‘n Spreidings diagram is ‘n grafiek wat gebruik word om te bepaal of daar ‘n verhouding tussen twee veranderlikes is. ‘n Spreidingsdiagram is ‘n kragtige hulpmiddel vir navorsers om te bepaal of daar ‘n verband tussen twee veranderlikes bestaan. Die data op ‘n Spreidingsdiagram kan die volgende neiging hê:



Lyn van beste passing

Hoe om die lyn van beste passing te skets:

Dit verwys na ‘n lyn wat deur ‘n verspreidings diagram se data gaan wat die data die beste voorstel. Die lyn van beste passing is nie so akkuraat nie, maar dit help om die tendens van die data voor te stel.

Probeer om dieselfde hoeveelheid datapunte bo en onder die lyn te hê.

Regressielyn

Die regressielyn is basies die akkurate weergawe van ‘n lyn van beste passing. Dit gebruik die kleinste kwadrate metode om die gradiënt en y – afsnit te bepaal van die regressielyn

Standaardvorm van ‘n regressielyn: $y = A + Bx$

Hoe om die vergelyking van die regressielyn te bepaal met ‘n Casio fx-82ZA sakrekenaar:

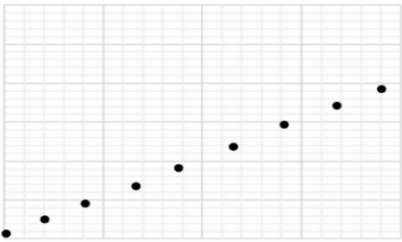
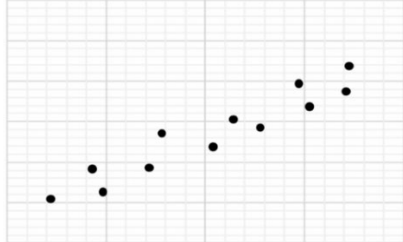
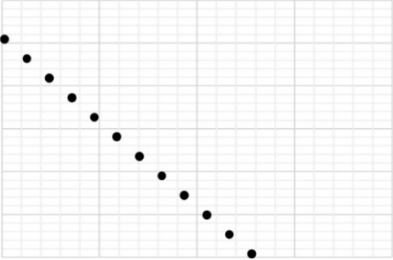
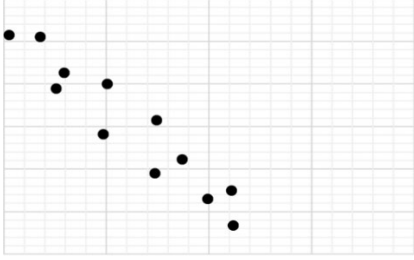
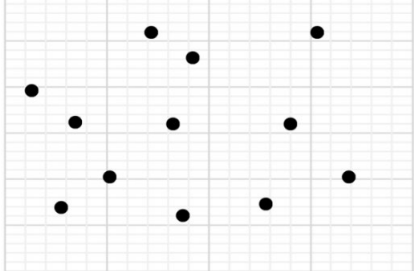
1. Druk MODE en selekteer STAT.
2. Selekteer $A + Bx$.
3. Vul data punte in.
4. Kolom(X) druk = na elke data punt
5. Kolom(Y) druk= na elke data punt
6. Na al die data punte ingevul is druk AC
7. Druk SHIFT , druk dan 1
8. Druk die nommer langs “Reg”
9. Druk die nommer langs A, dan druk =: om A te vind
10. Druk SHIFT , druk dan 1
11. Druk die nommer langs “Reg”
12. Druk die nommer langs B, druk =: om B te vind

Hoe om ‘n regressielyn te skets:

Plot die A waarde van die regressielyn.
Bepaal die gemiddelde punte $(\bar{x} ; \bar{y})$ en plot die gemiddelde punt.
Skets ‘n lyn vanaf punt A deur die gemiddelde punt.

How to draw a regression line if the scale of the graph do not start with (0; 0)

Om ‘n regressielyn te bepaal, vervang enige twee x-waardes wat tussen die maksimum en minimum x-waardes in die regressielyn se vergelyking. Dui die punte aan op die grafiek en verbind die punte.

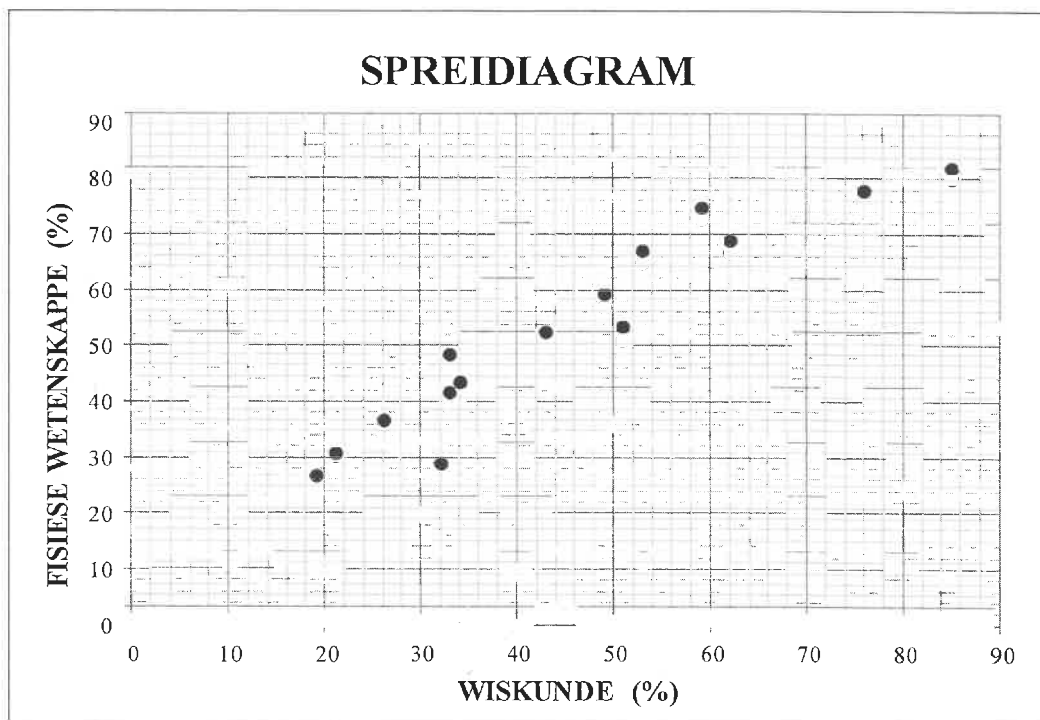
Hoe om die gemiddelde punt te bepaal op 'n Casio fx-82ZA sakrekenaar :	Uitskieters
• Maak seker dat al jou data ingevul is in jou sakrekenaar. • Druk SHIFT, druk dan 1 • Druk die nommer langs “Var” • Druk die nommer langs $\bar{x}$, druk dan =: om die gemiddelde x te vind • Druk SHIFT, druk dan 1 • Druk die nommer langs “Var” Druk die nommer langs $\bar{y}$, druk dan =: om die gemiddelde y te vind	Dit is 'n waarde wat “verder” (hoër of laer) is as meeste van die ander data punte. Los die uitskieter uit as jy die lyn van beste passing skets of die regressielyn bereken. Die rede hiervoor is dat die uitskieter nie die tendens volg nie en sal die tendenslyne beïnvloed wat toekomstige voorspellings nie so akkuraat, as moontlik, sal maak nie.
Korrelasie	
Die korrelasiekoëffisiënt is 'n statistiese maatstaf van die sterkte van die verwantskap tussen twee veranderlikes. Korrelasiekoëffisiënt word aangedui met (r) en is tussen -1 en 1. Hoe nader die datapunte aan die regressielyn is, hoe sterker is die verhouding. Dit beteken hoe nader r aan 1 of -1 is. Hoe verder die datapunte van die regressielyn af is, hoe swakker is die verhouding, en hoe nader is r aan 0. As die gradiënt van die regressielyn positief is, dan het die datastel 'n positiewe korrelasie en as die gradiënt van die regressielyn negatief is, dan het die data 'n negatiewe korrelasie. As die korrelasiekoëffisiënt groter is as 0,9 het die data 'n baie sterk positiewe korrelasie. As die korrelasiekoëffisiënt kleiner is as -0,9, sê ons dat daar 'n baie sterk negatiewe korrelasie is. Die sterkte van die assosiasie word bepaal deur die korrelasiekoëffisiënt (r).	
 Perfect positive linear association.	 Very Strong positive linear association.
 Perfect negative association.	 Very Strong negative association.
 No correlation.	How to calculate the correlation coefficient using your calculator: • Make sure your data is entered correctly in your calculator. See page 2. • Press shift then press 1. • Press the number next to “Reg” • Press the number next to r then press =.

Eksamen Vrae

VRAAG 1

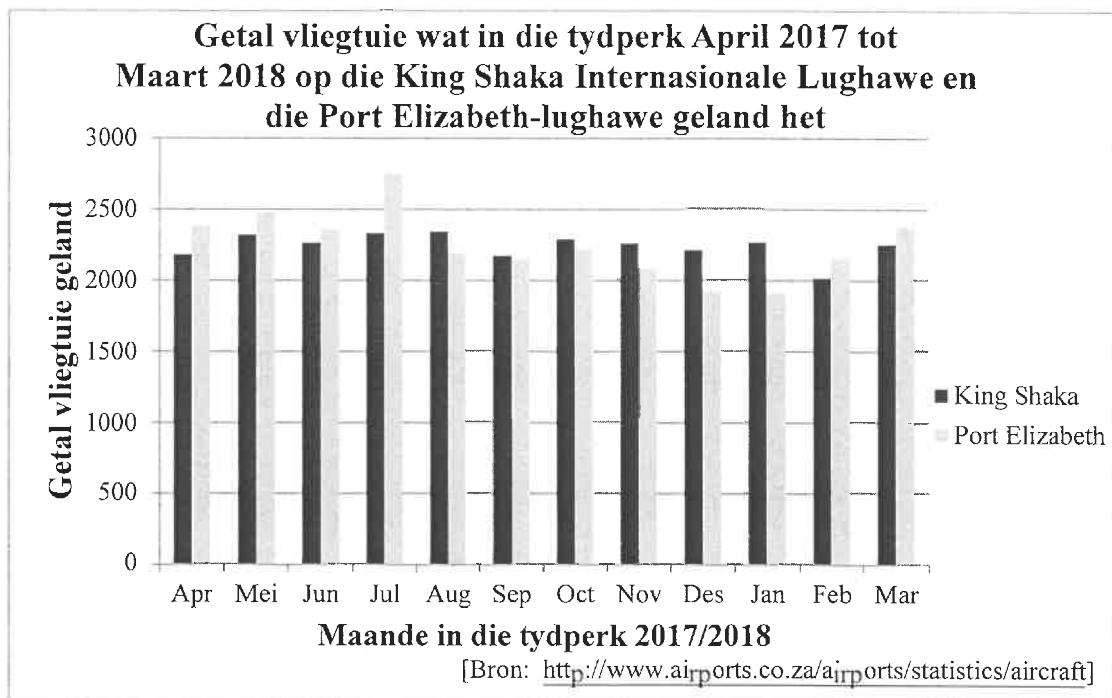
'n Wiskunde-onderwyseres was nuuskierig om vas te stel of haar leerders se Wiskundepunte hulle Fisiese Wetenskappe-punte beïnvloed het. In die tabel hieronder word 15 van die leerders in haar klas se Wiskunde- en Fisiese Wetenskappe-punte as 'n persentasie (%) getoon.

WISKUNDE (AS %)	26	62	21	33	53	76	32	59	43	33	49	51	19	34	85
FISIESE WETENSKAPPE (AS %)	34	67	28	46	65	76	26	73	50	39	57	51	24	41	80



- 1.1 Bepaal die vergelyking van die kleinste kwadrate-regressielyn vir die data. (3)
 - 1.2 Skets die kleinste kwadrate-regressielyn op die spreidiagram wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word. (2)
 - 1.3 Voorspel die Fisiese Wetenskappe-punt van 'n leerder wat 69% in Wiskunde behaal het. (2)
 - 1.4 Skryf die korrelasiekoëffisiënt tussen die Wiskunde- en Fisiese Wetenskappe-punte vir die data neer. (1)
 - 1.5 Lewer kommentaar op die sterkte van die korrelasie tussen die Wiskunde- en Fisiese Wetenskappe-punte van die data. (1)
 - 1.6 Watter tendens het die onderwyseres tussen die uitslae van die twee vakke waargeneem? (1)
- [10]**

Die getal vliegtuie wat in die tydperk vanaf April 2017 tot Maart 2018 op die King Shaka Internasionale Lughawe en die Port Elizabeth-lughawe geland het, word in die dubbelstaafgrafiek hieronder getoon.



2.1 Die getal vliegtuie wat gedurende party maande van die gegewe tydperk op die Port Elizabeth-lughawe geland het, oorskry die getal landings op die King Shaka Internasionale Lughawe. Gedurende watter maand is hierdie verskil die grootste? (1)

2.2 Die getal vliegtuie wat maandeliks op die King Shaka Internasionale Lughawe geland het is:

2 182	2 323	2 267	2 334	2 346	2 175
2 293	2 263	2 215	2 271	2 018	2 254

Bereken die gemiddelde getal van die data (2)

2.3 Bereken die standaardafwyking van die getal vliegtuiglandings op die King Shaka Internasionale Lughawe vir die gegewe tydperk. (2)

2.4 Bepaal die getal maande waartydens die getal vliegtuiglandings op die King Shaka Internasionale Lughawe binne een standaardafwyking vanaf die gemiddelde was. (3)

2.5 Watter EEN van die volgende bewerings is KORREK?

- A. Daar was meer landings in Desember en Januarie op die Port Elizabeth-lughawe as op die King Shaka Internasionale Lughawe.
- B. Daar was vir die gegewe tydperk 'n groter variasie in die getal vliegtuiglandings op die King Shaka Internasionale Lughawe as op die Port Elizabeth-lughawe.
- C. Die standaardafwyking van die getal vliegtuiglandings op die Port Elizabeth-lughawe sal hoër wees as die standaardafwyking van die getal vliegtuiglandings op die King Shaka Internasionale Lughawe.

(1)
[9]

VRAAG 3

Die tabel hieronder toon die maandelikse inkomste (in rand) van 6 verskillende persone en die bedrag (in rand) wat elke persoon maandeliks aan 'n motorpaaielement spandeer.

MAANDELIKSE INKOMSTE (IN RAND)	9 000	13 500	15 000	16 500	17 000	20 000
MAANDELIKSE PAAIEMENT (IN RAND)	2 000	3 000	3 500	5 200	5 500	6 000

- 3.1 Bepaal die vergelyking van die kleinstekwadrate-regressielyn vir die data. (3)
- 3.2 Indien 'n persoon R14 000 per maand verdien, voorspel die maandelikse paaielement wat hierdie persoon aan 'n motorvoertuig kan spandeer. (2)
- 3.3 Bepaal die korrelasiekoëffisiënt tussen die maandelikse inkomste en die maandelikse paaielement van 'n motorvoertuig. (1)
- 3.4 'n Persoon wat R18 000 per maand verdien, moet besluit of 'n maandelikse paaielement van R9 000 aan 'n motorvoertuig spandeer kan word, al dan nie. Indien die inligting hierbo 'n ware weerspieëling van die bevolkingsdata is, op watter van die volgende sal die persoon heel moontlik besluit:
- A. Spandeer R9 000 per maand aangesien daar 'n baie sterk positiewe korrelasie tussen die bedrag verdien en die maandelikse paaielement is.
 - B. Spandeer NIE R9 000 per maand NIE aangesien daar 'n baie swak positiewe korrelasie tussen die bedrag verdien en die maandelikse paaielement is.
 - C. Spandeer R9 000 per maand, want die punt (18 000 ; 9 000) lê baie naby aan die kleinstekwadrate-regressielyn.
 - D. Spandeer NIE R9 000 per maand NIE, want die punt (18 000 ; 9 000) lê baie ver van die kleinstekwadrate-regressielyn af. (2)

VRAAG 4

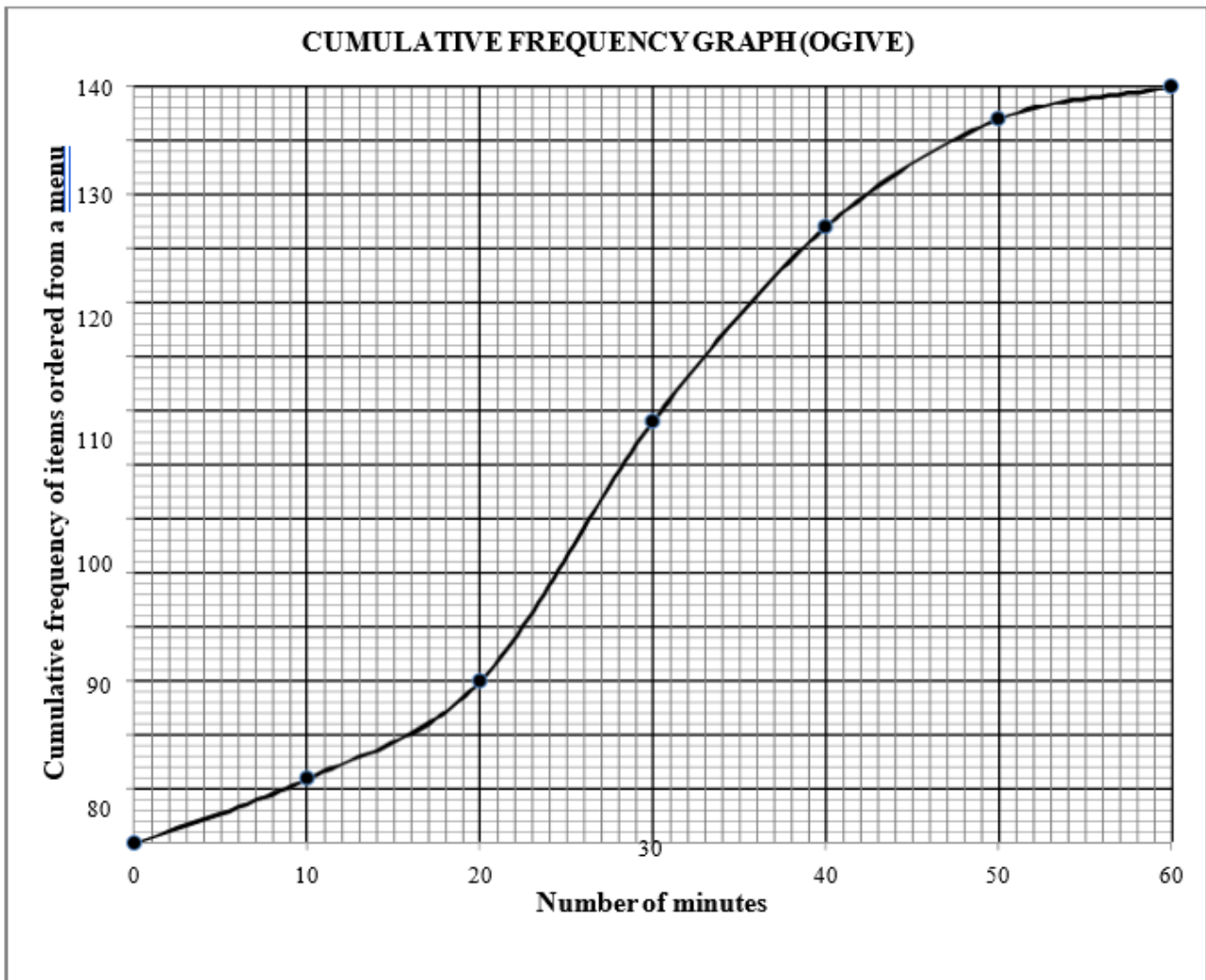
'n Opname is onder 100 mense gedoen oor die bedrag wat hulle maandeliks vir hulle selfoon- kontrakte betaal het. Die persoon wat die opname gedoen het, het bereken dat die geskatte gemiddelde betaling R309 per maand is. Ongelukkig het hy na die opname van die data verloor. Die frekwensietabel hieronder toon die gedeeltelike resultate van die ondersoek:

BEDRAG BETAAL(IN RAND)			FREKWENSIE
	$0 < x \leq 100$		7
	$100 < x \leq 200$		12
	$200 < x \leq 300$		a
	$300 < x \leq 400$		35
	$400 < x \leq 500$		b
	$500 < x \leq 600$		6

- 4.1 Hoeveel mense het R200 of minder vir hulle maandelikse selfoonkontrakte betaal? (1)
- 4.2 Gebruik die inligting hierbo om te toon dat $a = 24$ en $b = 16$. (5)
- 4.3 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 4.4 Gebruik die rooster wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word en teken 'n ogief (kumulatiewefrekwensie-grafiek) om die data voor te stel. (4)
- 4.5 Bepaal hoeveel mense meer as R420 per maand vir hulle selfoonkontrakte betaal het. (4)

VRAAG 5

5.1 Die kumulatiewefrekwensie-grafiek (ogief) hieronder toon die totale aantal geregte wat oor 'n tydperk van 1 uur vanaf 'n spyskaart bestel is.



- 5.1.1 Skryf die totale aantal voedselitems neer wat gedurende hierdie uur vanaf die spyskaart bestel is. (1)
- 5.1.2 Skryf die modale klas van die data neer. (1)
- 5.1.3 Hoe lank het dit geneem om die eerste 30 voedselitems te bestel? (1)
- 5.1.4 Hoeveel voedselitems is in die laaste 15 minute bestel? (2)
- 5.1.5 Bepaal die 75^{ste} persentiel van die data. (2)
- 5.1.6 Bereken die interkwartielvariasiewydte (-omvaang) van die data. (2)

5.2 Reggie werk deelyds as ‘n kelner by ‘n plaaslike restaurant. Die bedrag geld(in rand) wat hy oor ‘n tydperk van 15 dae met foonitjies (‘tips’) gemaak het, word hieronder gegee.

35	Bedrag	75	80	80
90	100	100	105	105
110	110	115	120	125

5.2.1 Bereken:

(a) Die gemiddeld van die data (2)

(b) Die standaardafwyking van die data (2)

5.2.2 Marie werk ook deelyds as ‘n kelnerin by dieselfde restaurant. Oor dieselfde 15 dag-tydperk het Matie dieselfde gemiddelde bedrag met foonitjies as Reggie ingesamel, maar haar standaardafwyking was R14.

Gebruik die beskikbare inligting en lewer kommentaar op die:

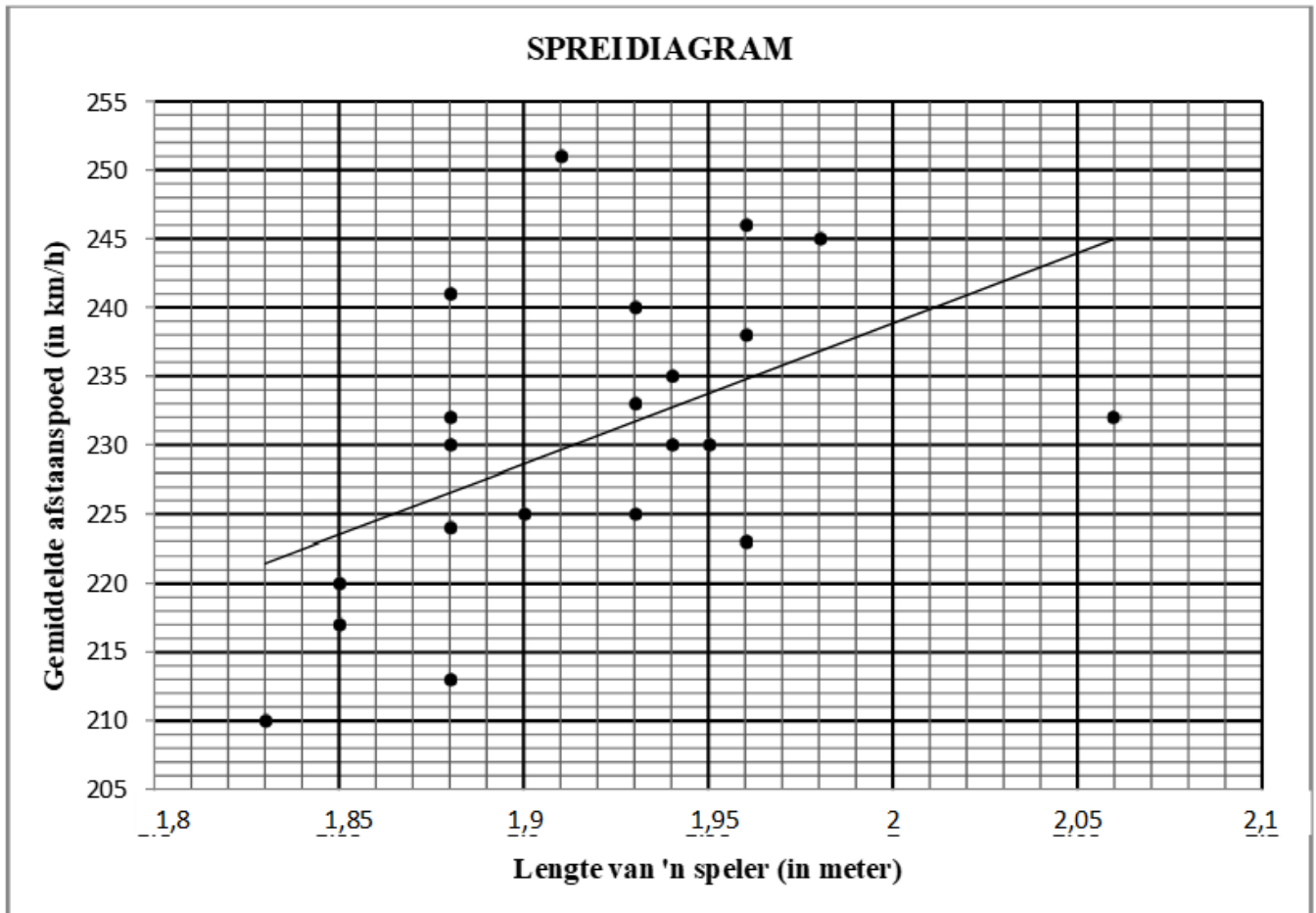
(a) Totale bedrag in foonitjies wat ELKEEN van hulle oor die 15 dag-tydperk ingesamel het (1)

(b) Verspreiding wat ELKEEN van hulle met daaglikse foonitjies oor hierdie tydperkintvang het (1)

[15]

VRAAG 6

'n Bekende vraag onder professionele tennisspelers is of die spoed van 'n tennisaflaan (in km/h) van die lengte van 'n speler (in meter) afhang. Die lengtes van 21 tennisspelers en die gemiddelde spoed van hulle aflane is tydens 'n toernooi aangeteken. Die data word in die spreidiagram hieronder voorgestel. Die kleinste kwadrate-regressielyn is ook getrek.



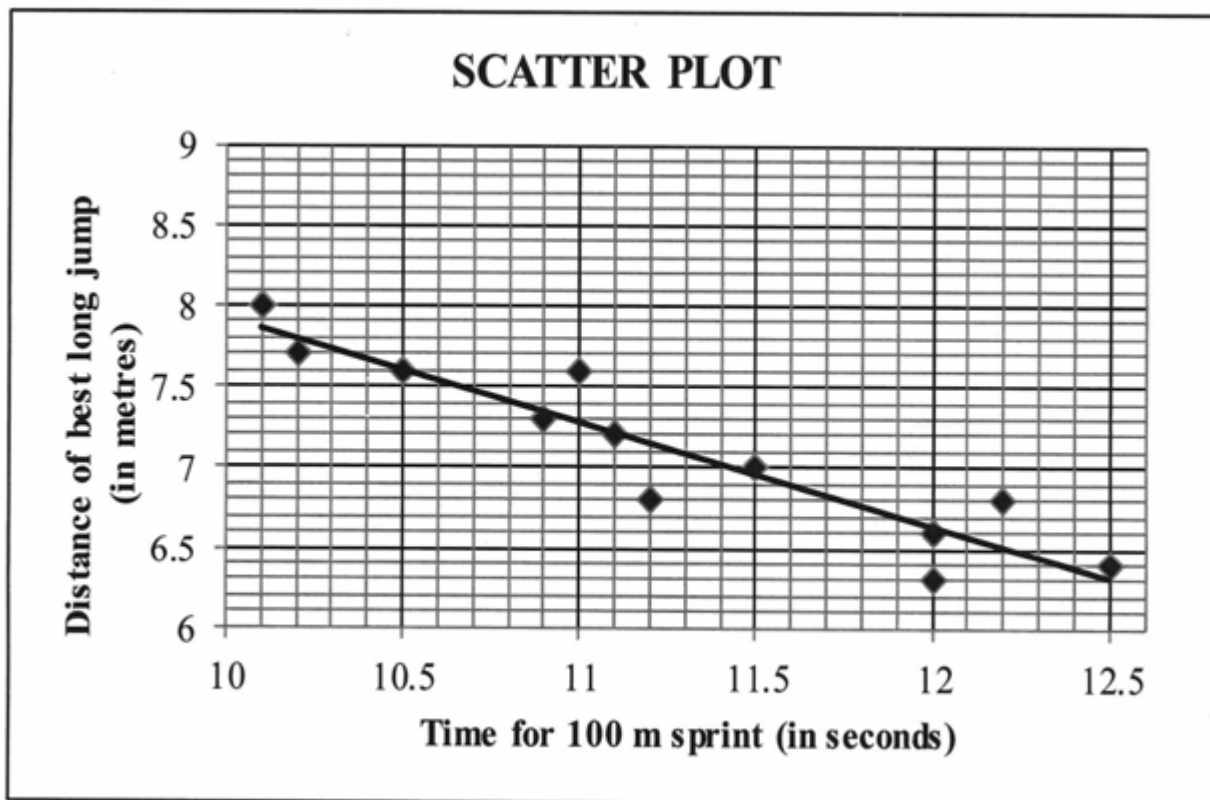
- 6.1 Skryf die vinnigste gemiddelde afslaanspoed (in km/h) wat in hierdie toernooi bereik is, neer. (1)
- 6.2 Beskou die volgende korrelasiekoëffisiënte:
- A. $r = 0,93$ B. $r = -0,42$ C. $r = 0,52$
- 6.2.1 Watter EEN van die korrelasiekoëffisiënte gegee, pas die beste by die geplote data? (1)
- 6.2.2 Gebruik die spreidiagram en kleinste kwadrate- regressielyn om jou antwoord op VRAAG 6.2.1 te motiveer. (1)
- 6.3 Waarop dui die data ten opsigte van die spoed van 'n tennisaflaan (in km/h) en die lengte van 'n speler (in meter)? (1)
- 6.4 Die vergelyking van die regressielyn word as $\hat{y} = 27,07 + bx$ gegee . Verduidelik. (1)

VRAAG 7

Die tabel hieronder toon die tyd (in sekondes, tot EEN desimale syfer afgerond) wat dit 12 atlete neem om die 100 meter-naelloop te voltooi, asook die afstand (in meter, tot EEN desimale dyfer afgerond) van hulle beste sprong in verspring.

Tyd vir 100 m-naelloop (in sekondes)	10,1	10,2	10,5	10,9	11	11,1	11,2	11,5	12	12	12,2	12,5
Afstand van beste sprong in verspring (in meter)	8	7,7	7,6	7,3	7,6	7,2	6,8	7	6,6	6,3	6,8	6,4

Die data hierbo word in die spreidiagram hieronder voorgestel.



Die vergelyking van die kleinste kwadrate-regressielyn is $\hat{y} = a + bx$.

- 7.1 Bepaal die waardes van a en b . (3)
- 7.2 'n Athleet hardloop die 100 meter-naelloop in 11,7 sekondes. Gebruik $\hat{y} = a + bx$ om die afstand van hierdie atleet se beste sprong in verspring te voorspel. (2)
- 7.3 'n Ander atleet voltooi die 100 meter-naelloop in 12,3 sekondes en die afstand van sy beste sprong in verspring is 7,6 metres. Indien dit by die data ingesluit word, sal die gradiënt van die kleinste kwadrate-regressielyn toeneem of afneem? Motiveer jou antwoord sonder enige verdere berekeninge. (2)

[7]

VRAAGS 8

‘n Groep van 23 meisies word in ‘n eksperiment voorsien van ‘n bladsy met 30 gekleurde reghoeke. Hulle word gevra om die kleure van die reghoeke so vining as moontlik korrek op te noem. Die tyd, in sekondes, wat dit elkeen van die meisies geneem het, word in die table hieronder gegee.

12	13	13	14	14	16	17	18	18	18	19	20
21	21	22	22	23	24	25	27	29	30	36	

- 8.1 Bereken:
 - 8.1.1 Die gemiddelde van die data (2)
 - 8.1.2 Die interkwartielvariasiewydte van die data (3)
- 8.2 Die standaardafwyking van die tyd wat dit die meisies geneem het, is 5,94. Hoeveel meisies het langer as EEN standaardafwyking vanaf die gemiddelde geneem om die kleure op te noem? (2)
- 8.3 Trek ‘n mond-en-snordiagram (boksplot) om die data voor te stel op die getallelyn wat in die ANTWOORDEBOEK verskaf word. (3)
- 8.4 Die vyfpunt-opsomming van die tyd wat dit ‘n groep van 23 seuns geneem het om die kleure van die reghoeke korrek op te noem, is (15 ; 21 ; 23 ; 5 ; 26 ; 38).
 - 8.4.1 Watter van die twee groepe, meisies of seuns, het die laagste mediaantyd gehad om die kleure van die reghoeke korrek op te neem? (1)
 - 8.4.2 Die eerste drie leerders wat die kleure van al 30 reghoeke in die kortste tyd korrek opnoem, sal ‘n prys ontvang. Hoeveel seuns sal onder hierdie drie prysweners wees? Motiveer jou antwoord. (2) [13]