higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N5

(16030175)

20 November 2020 (X-vraestel)
09:00–12:00

Wetenskaplike sakrekenaars kan gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 5 bladsye en 'n formuleblad van 5 bladsye.

188Q1E2020

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA
NASONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N5
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel geabruik is.
4. Toon alle tussenstappe en vereenvoudig waar moontlik.
5. Alle finale antwoorde moet tot DRIE desimale afgerond word.
6. Vrae kan in enige volgorde beantwoord word, maar onderafdelings van vrae moet bymekaar gehou word.
7. Sketse moet groot, netjies en ten volle benoem wees.
8. Werk netjies.

VRAAG 1

1.1 Bepaal die volgende limiet:

$$\lim_{x\to 0} x \cot x$$ (4)

1.2 Gegee: $\log_4 y = \lim_{x\to 0} \frac{\int_{-x}^{0} e^t\,dt}{2x}$

Bereken die numeriese waarde van elk van die volgende:

WENK: $\int_{-x}^{0} e^t\,dt = 1 - e^{-x}$

1.2.1 $\log_4 y$ (3)

1.2.2 y (1)

1.3 As $f\left(x = \frac{x^3 - 6x + 4}{x^2 - 1}\right)$, bepaal die waarde(s) van x waarvoor $f(x)$ diskontinu is. (2)

[10]

VRAAG 2

2.1 Bepaal die afgeleide ('derivative') van $f(x) = \frac{1-x}{2-x}$ van eerste beginsels. (5)

2.2 Bewys dat as $y = \arccos x$, then $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $y = arc\cos x$, dan $\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3)

2.3 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ in elk van die volgende gevalle:
(Vereenvoudiging nie vereis)

2.3.1 $y = \sqrt{\sin(7x + \ln 5x)}$

2.3.2 $y = 4\ln(\ln(\sec^2 x))$

(2 × 4) (8)

2.4 Bereken $\frac{dy}{dx}$ as $y = \left(3x^2 + 2\right)^{\frac{1}{x}}$ met behulp van logaritmiese differensiasie. (4)

2.5 Ggegee die implisiete funksie: $\frac{x+y}{x-y} = x$

2.5.1 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ (4)

2.5.2 Bepaal die vergelyking van die tangens tot die grafiek by die punt $(0{,}1)$ (2)

[26]

VRAAG 3

3.1 Gegee: $f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 3$

3.1.1 Bepaal die koördinate van die infleksiepunt van $f(x)$ (2)

3.1.2 Teken 'n tabel van x en $f(x)$, waar x strek van $x = -2$ tot $x = 2$ (3)

3.13 Trek 'n netjiese grafiek van $f(x)$ tussen die waardes in VRAAG 3.1.2 en toon die draaipunte daarop. (2)

3.1.4 Een wortel van die vergelyking $x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ is naby $-1{,}6$.

Gebruik Taylor/Newton se metode twee keer om 'n beter benadering van hierdie wortel te bepaal. (Wortel korrek tot DRIE desimale) (4)

3.2 Die relatiewe verplasing in meter van 'n spesifieke deeltjie teen tyd t in sekonde word gedefinieer deur die funksie $f(t) = 4t^2 1nt$.

Wat is die versnelling van die deeltjie teen $t = 3{,}5\ s$? (4)

[15]

VRAAG 4

4.1 Bepaal $\int y\,dx$ in elk van die volgende gevalle:

4.1.1 $y = (e^x + e^{-x})^{\frac{1}{4}}(e^x - e^{-x})$ (3)

4.1.2 $y = \dfrac{1}{x(1 + 2\ln x)}$ (3)

4.1.3 $y = \dfrac{2x^3 + 2x + 7x^2 + 9}{2x + 3}$ (5)

4.1.4 $y = e^x\sqrt{1 - e^{2x}}$ (4)

4.2 Bepaal $\int y\,dx$ deur die integraal in parsieelbreuke op te los:

$$y = \frac{9x + 25}{(x+3)^2}$$ (5)

[20]

VRAAG 5

5.1 Evalueer die bepaalde integraal: $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ (4)

5.2 Gegee: $x^2 + 4y^2 = 4$ in die eerste kwadrant

5.2.1 Maak 'n netjiese skets om die ingeslote area, die verteenwoordigende strokie en die snypunt te toon. (2)

5.2.2 Bereken die grootte ('magnitude') van die area in VRAAG 5.2.1. (4)

5.2.3 Bereken die volume van die vaste revolusie ('solid of revolution') wat gevorm word wanneer die area in VRAAG 5.2.1 om die y-as geroteer word. (4)

5.3 Bereken die tweede areamoment van 'n sisrkellamina met 'n radius van 7 cm en om 'n as deur die middel ('centre') en loodreg tot die vlak ('plane') van die lamina (5)

[19]

VRAAG 6

6.1 Bepaal die algemene oplossing van $\frac{dy}{dx} = \left(1 + e^{-x}\right)\left(y^2 - 1\right)$ (3)

6.2 Bepaal die partikuliere oplossing van

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(x^2 + \pi\right)^2 \text{ if } \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = 3,\ x = 0 \text{ and } \mathrm{y} = -4$$ (7)

[10]

TOTAAL: 100

WISKUNDE N5

FORMULEBLAD

Enige toepaslike formule kan ook gebruik word.

TRIGONOMETRIE

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x \longrightarrow \tan^2 x = \sec^2 x - 1$

$1 + \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x \longrightarrow \cot^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A = ½(1 - \cos 2\text{A})$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A = ½ (1 + \cos 2\text{A})$

$\sin (\text{A} \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \pm \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\operatorname{cosec} x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

$\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$; $\operatorname{cosec} x = \dfrac{1}{\sin x}$; $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\int\int f(x)dx$
$\sin f(x)$	$\cos f(x) \cdot f^{1}(x)$	—
$\cos f(x)$	$-\sin f(x) \cdot f^{1}(x)$	—
$\tan f(x)$	$\sec^2 f(x) \cdot f^{1}(x)$	—
$\cot f(x)$	$-\operatorname{cosec}^2 f(x) \cdot f^{1}(x)$	—
$\sec f(x)$	$\sec f(x) \cdot \tan f(x) \cdot f^{1}(x)$	—
$\operatorname{cosec} f(x)$	$-\operatorname{cosec} f(x) \cdot \cot f(x) \cdot f^{1}(x)$	—
$\sin^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	—
$\cos^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$	—
$\tan^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	—
$\cot^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{1+[f(x)]^2}$	—
$\sec^{-1} f(x)$	$\frac{f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	—
$\operatorname{cosec}^{-1} f(x)$	$\frac{-f'(x)}{f(x)\sqrt{[f(x)]^2-1}}$	—
$\sin^2(ax)$	—	$\frac{x}{2}-\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\cos^2(ax)$	—	$\frac{x}{2}+\frac{\sin(2ax)}{4a}+C$
$\tan^2(ax)$	—	$\frac{1}{a}\tan(ax)-x+C$
$\cot^2(ax)$	—	$-\frac{1}{a}\cot(ax)-x+C$

$f(x)$	$\frac{d}{dx}f(x)$	$\int f(x)dx$
x^n	nx^{n-1}	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad (n \neq -1)$
ax^n	$a\frac{d}{dx}x^n$	$a\int x^n dx$
e^{ax+b}	$e^{ax+b} \cdot \frac{d}{dx}(ax+b)$	$\frac{e^{ax+b}}{\frac{d}{dx}(ax+b)}+C$
a^{dx+e}	$a^{dx+e}.\ln a\,\frac{d}{dx}(dx+e)$	$\frac{a^{dx+e}}{\ln a.\frac{d}{dx}(dx+e)}+C$
$ln(ax)$	$\frac{1}{ax}.\frac{d}{dx}ax$	$x\ln ax - x + C$
$e^{f(x)}$	$e^{f(x)}.\frac{d}{dx}f(x)$	—
$a^{f(x)}$	$a^{f(x)}.\ln a.\frac{d}{dx}f(x)$	—
$ln\ f(x)$	$\frac{1}{f(x)}.\frac{d}{dx}f(x)$	—
$\sin ax$	$a\cos ax$	$-\frac{\cos ax}{a}.+C$
$\cos ax$	$-a\sin ax$	$\frac{\sin ax}{a}.+C$
$\tan ax$	$a\sec^2 ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec(ax)]+C$
$\cot ax$	$-a\,\mathrm{cosec}^2\,ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sin(ax)]+C$
$\sec ax$	$a\sec ax\cdot\tan ax$	$\frac{1}{a}\ln[\sec ax+\tan ax]+C$
$\mathrm{cosec}\,ax$	$-a\,\mathrm{cosec}\,ax\cdot\cot ax$	

BINOMIAALSTELLING

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\times 2\times 3}x^{n-3}h^3 + \ldots\ldots$$

DIFFERENSIASIE

$$e = -\frac{f(a)}{f'(a)}$$

$$r = a + e$$

PRODUKTEREËL

$$y = u(x)\,.\,v(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = u\,.\,\frac{dv}{dx} + v\,.\,\frac{du}{dx}$$

$$= u \cdot v' + v \cdot u'$$

KWOSIËNTREËL

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,.\,\frac{du}{dx} - u\,.\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

KETTINGREËL

$$y = f(u(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

INTEGRASIE

$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$

$\int [f(x)]^n \bullet f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \qquad (n \neq -1)$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + C$

TOEPASSINGS VAN INTEGRASIE

AREAS

$A_x = \int_a^b y dx\, ;\ A_x = \int_a^b (y_1 - y_2) dx$

$A_y = \int_a^b x dy\, ;\ A_y = \int_a^b (x_1 - x_2) dy$

VOLUMES

$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx\, ;\ V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx$

$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy\, ;\ V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy$

TWEEDE AREA MOMENT

$I_x = \int_a^b r^2 dA\, ;\ I_y = \int_a^b r^2 dA$

TRAAGHEIDSMOMENTE

Massa = digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m r^2$

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$