higher education & training

Department:
Higher Education and Training
REPUBLIC OF SOUTH AFRICA

NASIONALE SERTIFIKAAT

WISKUNDE N5

(16030175)

23 November 2023 (X-vraestel)
09:00–12:00

Wetenskaplike sakrekenaars en tekeninstrumente mag gebruik word.

Hierdie vraestel bestaan uit 6 bladsye en 'n formuleblad van 5 bladsye.

069Q1E2323

DEPARTEMENT VAN HOËR ONDERWYS EN OPLEIDING
REPUBLIEK VAN SUID-AFRIKA

NASIONALE SERTIFIKAAT
WISKUNDE N5
TYD: 3 UUR
PUNTE: 100

INSTRUKSIES EN INLIGTING

1. Beantwoord al die vrae.
2. Lees al die vrae aandagtig deur.
3. Nommer die antwoorde volgens die nommeringstelsel wat in hierdie vraestel gebruik is.
4. Gebruik slegs 'n blou of swart pen.
5. Toon alle tussenstappe en vereenvoudig waar moontlik.
6. Alle finale antwoorde moet tot DRIE desimale plekke afgerond word.
7. Vrae mag in enige volgorde beantwoord word, maar onderafdelings van vrae moet bymekaar gehou word.
8. Sketse moet groot en netjies wees en volledige byskrifte bevat.
9. Wetenskaplike sakrekenaars mag gebruik word.
10. Skryf netjies en leesbaar.

VRAAG 1

1.1 Bepaal die volgende limiete:

1.1.1
$$y = \lim_{x \to \infty} \frac{-4x^2 + 7x + 3}{x^2 - 5}$$
(3)

1.1.2
$$y = \lim_{x \to 9} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + 9 - x\right)}{\ln(x - 8)}$$
(2)

1.2 Bepaal die waarde(s) van x waarvoor $f(x)$ diskontinu is as

$$y = \frac{2^{-x+3} + 1}{3^{-x} - 1}$$
(1)
[6]

VRAAG 2

2.1 Toon dat as $y = arc\,\sin x$, dan is
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$
(3)

2.2 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ in elk van die volgende gevalle:
(Vereenvoudiging word NIE vereis nie)

2.2.1
$$y = \sin^3 \sqrt{x} + \sqrt[3]{\sin x}$$
(5)

2.2.2
$$y = \tan\left[\cos\left(\sqrt{\tan x^3}\right)\right]$$
(5)

2.3 Bereken $\frac{dy}{dx}$ as $y = (2x^4 + 1)^{\tan 3x^2}$ met behulp van logaritmiese differensiasie. (4)

2.4 Gegewe die implisiete funksie:
$$x^2y + y^4 = 4 + 2x$$

2.4.1 Bepaal $\frac{dy}{dx}$ (4)

2.4.2 Bepaal die gradiënt van die funksie van die punt $(-1;\ 1)$ (1)
[22]

VRAAG 3

3.1 Gegewe: $f(x) = x^3 + 4x^2 + 3x - 5$

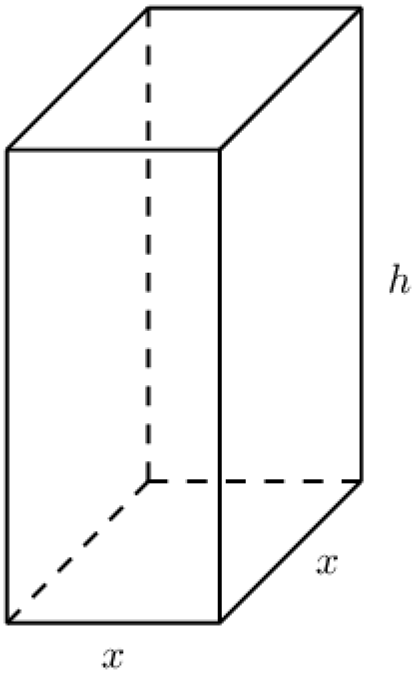
3.1.1 Bepaal die koördinate van die draaipunt van $f(x)$. (3)

3.1.2 Stel ŉ tabel op van x en $f(x)$, waar x van $x = -4$ tot $x = 1$ strek. (2)

3.1.3 Teken ŉ netjiese grafiek van $f(x)$ tussen hierdie waardes. Toon die draaipunte daarop aan. (2)

3.1.4 Gebruik die tabel en die grafiek om ŉ waarde vir die beste wortel tussen $x = 0$ en $x = 1$ van die vergelyking $x^3 + 4x^2 + 3x - 5 = 0$ te skat en gebruik dan Taylor/Newton se metode TWEE keer om ŉ beter benadering van hierdie wortel te bepaal. (Wortel moet korrek tot TWEE desimale syfers wees.) (4)

3.2 ŉ Reghoekige vrugtesaphouer wat van karton gemaak is, het ŉ vierkantige basis en bevat 750 cm^3 vrugtesap. Die houer het ŉ bokant wat spesifiek ontwerp is om te vou om die houer toe te maak. Die karton wat benodig word om die bokant van die houer toe te vou, is twee keer meer as die karton wat vir die basis benodig word, wat slegs ŉ enkele laag karton benodig. Bepaal die afmetings van die houer sodat die oppervlakte van die karton wat gebruik word, verminder word.



(5)

3.3 Lug word teen ŉ konstante tempo van 3 cm^3/s in ŉ sferiese ballon gepomp. Hoe vinnig neem die radius van die ballon toe wanneer die radius 2 cm bereik?

WENK: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (4)

[20]

VRAAG 4

4.1 Bepaal $\int y\,dx$ in elk van die volgende gevalle:

4.1.1
$$y = \frac{\operatorname{cosec} x \cot x}{1 + \operatorname{cosec}^2 x}$$
(3)

4.1.2
$$y = \sin^2\left(\frac{5}{\pi}x\right)$$
(3)

4.1.3 $$y = \cos^5 x \sin^3 x$$ (4)

4.1.3
$$y = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{x + 3}$$
(5)

4.1.4 $$y = \log_2 x$$
WENK: u of $f(x) = \log_2 x$ (4)

4.2 Bepaal $\int y\,dx$ deur die integraal in parsieelbreuke op te los:

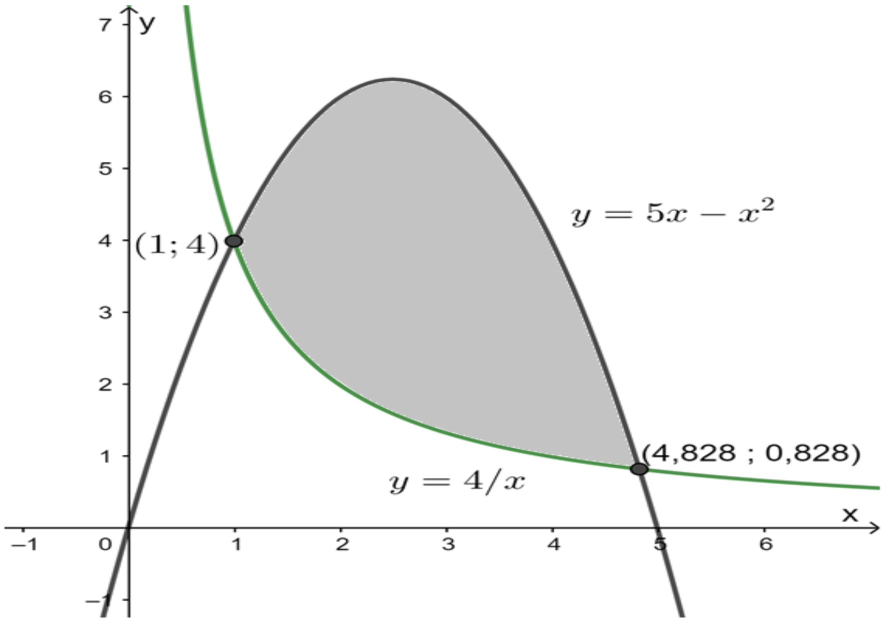
$$y = \frac{x - 10}{x^2 + x - 2}$$
(5)
[24]

VRAAG 5

5.1 Gegewe dat $F(a) = -3$ en $F(b) = 7$, bepaal die waarde van $\int_a^b f(t)dt$. (2)

5.2 Bepaal $\int_0^\infty e^{-st}.f(t)dt\ \ as f(t) = -\pi t$ deur al die integrasiestappe te toon. (5)

5.3 Hier onder is 'n grafiek met die snypunte en oppervlakte begrens deur die krommes $y = 5x - x^2$ en $y = \frac{4}{x}$.



5.3.1 Bereken die grootte van die oppervlakte in VRAAG 5.2.2. (3)

5.3.2 Bereken die volume van die omwentelingsliggaam wat gevorm word wanneer die oppervlakte in VRAAG 5.3.1 om die x-as geroteer word. (5)

5.4 Bepaal uit eerste beginsels die tweede oppervlaktemoment van 'n reghoekige lamina met betrekking tot 'n verwysingas parallel aan een sy van die lamina wat dit halveer. (5)

[20]

VRAAG 6

6.1 Bepaal die algemene oplossing van:

$$\frac{dy}{dx} = xy - 3x - 2y + 6$$ (3)

6.2 Bepaal die spesifieke oplossing van:

$$\tan x + \sec x.\frac{d^2y}{dx^2} = \sec x.3^{-x}, \quad as \quad \frac{dy}{dx}\bigg|_{x=0} = \frac{1}{\ln 3} \text{ en } y(0) = -1$$ (5)

[8]

TOTAAL: 100

WISKUNDE N5

FORMULEBLAD

Enige toepaslike formules mag ook gebruik word.

TRIGONOMETRIE

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

$1 + \cot^2 x = \mathrm{cosec}^2\, x$

$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

$\tan 2A = \dfrac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}$

$\sin^2 A = ½ - ½ \cos 2A$

$\cos^2 A = ½ + ½ \cos 2A$

$\sin (A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A$

$\cos (A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\tan (A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

$\sin A \cos B = ½ [\sin (A + B) + \sin (A - B)]$

$\cos A \sin B = ½ [\sin (A + B) - \sin (A - B)]$

$\cos A \cos B = ½ [\cos (A + B) + \cos (A - B)]$

$\sin A \sin B = ½ [\cos (A - B) - \cos (A + B)]$

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$; $\sin x = \dfrac{1}{\mathrm{cosec}\, x}$; $\cos x = \dfrac{1}{\sec x}$

BINOMIAALSTELLING

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}\,h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\,h^2 + \ldots$$

DIFFERENSIASIE

$$e = -\frac{f(a)}{f^{'}(a)}$$

$$r = a + e$$

PRODUKREËL

$$y = u(x)\ .\ v(x)$$

$$\frac{dy}{dx} = u\ .\ \frac{dv}{dx} + v\ .\ \frac{du}{dx}$$

$$= u \cdot v^{'} + v \cdot u^{'}$$

KWOSIËNTREËL

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\ .\ \frac{du}{dx} - u\ .\ \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$= \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2}$$

KETTINGREËL

$$y = f(u(x))$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$f(x)$	$\frac{d}{dx} f(x)$	$\int f(x)dx$
ax^n	nax^{n-1}	$\frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$
a	0	$ax + c$
e^x	e^x	$e^x + c$
a^x	$a^x.\ln a$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$
$\log_e x$	$\frac{1}{x}$	—
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	—
$\sin x$	$\cos x$	$- \cos x + c$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sin x + c$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\ln (\sec x) + c$
$\cot x$	$-\operatorname{cosec}^2 x$	$\ln (\sin x) + c$
$\sec x$	$\sec x \cdot \tan x$	$\ln [\sec x + \tan x] + c$
$\operatorname{cosec} x$	$-\operatorname{cosec} x \cdot \cot x$	$\ln (\operatorname{cosec} x - \cot x) + c$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	—
$\cos^{-1} x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	—
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	—
$\cot^{-1} x$	$\frac{-1}{1+x^2}$	—
$\sec^{-1} x$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	—
$\operatorname{cosec}^{-1} x$	$\frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$	—

$f(x)$	$\frac{d}{dx}\, f(x)$	$\int f(x)dx$
$\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	—	$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\frac{1}{a^2 + x^2}$	—	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$	—	$\frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	—	$\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + c$
$\frac{1}{x^2 - a^2}$	—	$\frac{1}{2a}\, ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c$
$\frac{1}{a^2 - x^2}$	—	$\frac{1}{2a}\, ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right) + c$

INTEGRASIE

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \ln\, f(x) + c$$

$$\int [f(x)]^n\, f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\frac{f(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$$

$$\frac{f(x)}{(x+a)^n} = \frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{(x+a)^3} + \cdots \frac{Z}{(x+a)^n}$$

TOEPASSINGS VAN INTEGRASIE

OPPERVLAKTES

$$A_x = \int_a^b y dx\, ;\; A_x = \int_a^b (y_1 - y_2)\, dx$$

$$A_y = \int_a^b x dy\, ;\; A_y = \int_a^b (x_1 - x_2)\, dy$$

VOLUMES

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx \; ; V_x = \pi \int_a^b \left(y_1^2 - y_2^2\right) dx$$

$$V_y = \pi \int_a^b x^2 dy \; ; V_y = \pi \int_a^b \left(x_1^2 - x_2^2\right) dy$$

TWEEDE OPPERVLAKTEMOMENT

$$I_x = \int_a^b r^2 dA \; ; I_y = \int_a^b r^2 dA$$

TRAAGHEIDSMOMENTE
Massa = digtheid × volume

$M = \rho V$

DEFINISIE: $I = m\, r^2$

ALGEMEEN: $I = \int_a^b r^2 dm = \rho \int_a^b r^2 dV$